

SURE: Shizuoka University REpository

<http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/>

Title	112 圧電介在物の界面き裂の応力・電気変位拡大係数(材料力学III)
Author(s)	石原, 正行; 野田, 直剛
Citation	講演論文集. 2001, p. 23-24
Issue Date	2001-09-21
URL	http://hdl.handle.net/10297/2140
Version	publisher
Rights	社団法人日本機械学会：本文データは学協会の許諾に基づきCiNiiから複製したものである

This document is downloaded at: 2017-09-24T23:09:29Z

圧電介在物の界面き裂の応力・電気変位拡大係数

Stress Intensity Factor and Electric Displacement Intensity Factor of Interface Cracks between Piezoelectric Inhomogeneity and Matrix

○正 石原 正行 (静大工) 正 野田 直剛 (静大工)

Masayuki ISHIHARA, Shizuoka University, Johoku 3-5-1, Hamamatsu
Naotake NODA, Shizuoka University, Johoku 3-5-1, Hamamatsu

Key Words: Electroelasticity, Debonded Inhomogeneity, Hilbert Problem

1. 緒言

近年, スマートストラクチャとして, 高分子樹脂中に圧電セラミックスのファイバーを配合する等の応用がなされるようになり, 圧電体のマイクロメカニクスは重要な課題となってきた。本研究では, 界面き裂を有する圧電体介在物/母材系が, 無限遠方で面外方向に力学的負荷, 面内方向に電気的負荷を受ける場合の2次元電気弾性問題を取り扱い, き裂先端での応力・電気変位拡大係数を定式化した。

2. 理論解析

2.1 問題設定

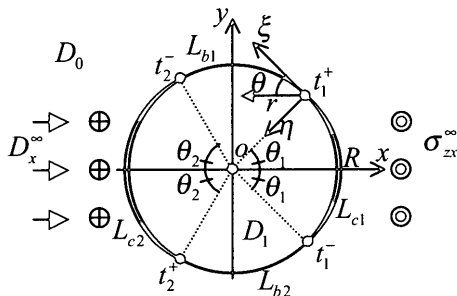


Fig. 1 Analytical model

Fig. 1に示すように, xy 平面上に, 円状圧電体介在物 D_1 (半径 R) を有する2次元無限圧電体 D_0 を考える。ここで D_0, D_1 は 6mm 族に属する圧電体で, xy 平面内で等方性を示すものとする。 G, e, k をそれぞれ, せん断係数, 圧電定数, 誘電定数とし, 下添え字 '0', '1' で D_0, D_1 を区別する。 D_0 と D_1 の界面を L_1 とし, はく離部分を $L_c (= L_{c1} + L_{c2})$, 結合部分を $L_b (= L_{b1} + L_{b2})$, はく離先端の位置を $t_1^{\pm} (= R e^{\pm i\theta_1})$, $t_2^{\pm} (= R e^{i(\pi \pm \theta_2)})$ とする。この系が無遠で一般的な面外せん断応力 σ_{zx}^{∞} および一般的な面内電気変位 D_x^{∞} を受けて, 2次元の面外変形 $w = w(x, y)$ ・電位分布 $\phi = \phi(x, y)$ を生じているとする。また, L_c では面外せん断応力・法線方向電気変位が零, L_b では面外せん断応力・法線方向電気変位・面外変位・電位が連続であるとする。

2.2 電気弾性場の支配方程式

w, ϕ は複素数 $z (= x + iy)$ の正則関数 $W(z), \Phi(z)$ を用いて次のように表わせる⁽¹⁾。

$$w = \text{Re}[W(z)], \quad \phi = \text{Re}[\Phi(z)] \quad (1)$$

ここで, L_1 を単位円に写す写像

$$z = \omega(\zeta) = R\zeta \quad (2)$$

を導入し, $W[\omega(\zeta)], \Phi[\omega(\zeta)]$ を $W(\zeta), \Phi(\zeta)$ と表記する。このとき, 面外せん断応力, 面外せん断ひずみ, 面内電気変位, 面内電場は $W(\zeta), \Phi(\zeta)$ を用いて表される⁽¹⁾。よって, この問題の電気弾性場は, 所定の境界条件を満たす正則関数 $W(\zeta), \Phi(\zeta)$ (以下, 複素ポテンシャルと呼ぶ) を求めることにより得られる。

2.3 境界条件

D_0', D_1' (式(2)による D_0, D_1 の像) に対する複素ポテンシャルをそれぞれ下添え字 '0', '1' を付して区別すると, $W_0(\zeta), \Phi_0(\zeta)$ は $1 < |\zeta| < \infty$ で, $W_1(\zeta), \Phi_1(\zeta)$ は $|\zeta| < 1$ で正則である。これらの正則関数を

$$\left. \begin{aligned} W_0(\zeta) &= \overline{W_0(1/\zeta)}, & \Phi_0(\zeta) &= \overline{\Phi_0(1/\zeta)}; & 0 < |\zeta| < 1 \\ W_1(\zeta) &= W_1(1/\zeta), & \Phi_1(\zeta) &= \Phi_1(1/\zeta); & |\zeta| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

として拡張すると, $W_0(\zeta), \Phi_0(\zeta)$ は $\{0 < |\zeta| < 1, 1 < |\zeta| < \infty\}$ で, $W_1(\zeta), \Phi_1(\zeta)$ は $\{|\zeta| < 1, |\zeta| > 1\}$ で正則となる⁽²⁾。また, 無限遠方での条件を考慮することにより, $\zeta \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 0$ に対する $W_0(\zeta), \Phi_0(\zeta)$ の漸近特性は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta \rightarrow \infty; & W_0(\zeta) \rightarrow K_w R \zeta, & \Phi_0(\zeta) & \rightarrow -K_\phi R \zeta \\ \zeta \rightarrow 0; & W_0(\zeta) \rightarrow \overline{K_w R} / \zeta, & \Phi_0(\zeta) & \rightarrow -\overline{K_\phi R} / \zeta \\ K_w &= \frac{k_0 \sigma_{zx}^{\infty} + e_0 D_x^{\infty}}{G_0 k_0 + e_0^2}, & K_\phi &= \frac{G_0 D_x^{\infty} - e_0 \sigma_{zx}^{\infty}}{G_0 k_0 + e_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

この時, L_c', L_b' (式(2)による L_c, L_b の像) での条件は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} G_0 [W_0^+(\tau) - W_0^-(\tau)] + e_0 [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] &= 0; & \tau \in L_c' \\ G_1 [W_1^+(\tau) - W_1^-(\tau)] + e_1 [\Phi_1^+(\tau) - \Phi_1^-(\tau)] &= 0; & \tau \in L_b' \\ e_0 [W_0^+(\tau) - W_0^-(\tau)] - k_0 [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] &= 0; & \tau \in L_c' \\ e_1 [W_1^+(\tau) - W_1^-(\tau)] - k_1 [\Phi_1^+(\tau) - \Phi_1^-(\tau)] &= 0; & \tau \in L_b' \\ G_0 [W_0^+(\tau) - W_0^-(\tau)] + e_0 [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] &= \\ -G_1 [W_1^+(\tau) - W_1^-(\tau)] - e_1 [\Phi_1^+(\tau) - \Phi_1^-(\tau)]; & & \tau \in L_b' \\ e_0 [W_0^+(\tau) - W_0^-(\tau)] - k_0 [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] &= \\ -e_1 [W_1^+(\tau) - W_1^-(\tau)] + k_1 [\Phi_1^+(\tau) - \Phi_1^-(\tau)]; & & \tau \in L_c' \\ W_0^+(\tau) + W_0^-(\tau) &= W_1^+(\tau) + W_1^-(\tau); & \tau \in L_b' \\ \Phi_0^+(\tau) + \Phi_0^-(\tau) &= \Phi_1^+(\tau) + \Phi_1^-(\tau); & \tau \in L_c' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで, 上添え字 '+', '−' は, それぞれ D_0', D_1' 内で $\zeta \rightarrow \tau$ とした場合の極限值を表す。

2.4 複素ポテンシャル

式(5)より,

$$\begin{cases} \Psi_\sigma(\zeta) = G_0 W_0(\zeta) + G_1 W_1(\zeta) + e_0 \Phi_0(\zeta) + e_1 \Phi_1(\zeta) \\ \Psi_D(\zeta) = e_0 W_0(\zeta) + e_1 W_1(\zeta) - k_0 \Phi_0(\zeta) - k_1 \Phi_1(\zeta) \end{cases} \quad (6)$$

として定義される関数 $\Psi_\sigma(\zeta)$, $\Psi_D(\zeta)$ は $0 < |\zeta| < \infty$ で正則であることが分かる。これと式(4)を考慮すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \Psi_\sigma(\zeta) = (G_0 K_w - e_0 K_\phi) R \zeta + (G_0 \overline{K_w} - e_0 \overline{K_\phi}) R / \zeta \\ \Psi_D(\zeta) = (e_0 K_w + k_0 K_\phi) R \zeta + (e_0 \overline{K_w} + k_0 \overline{K_\phi}) R / \zeta \end{cases} \quad (7)$$

式(5)-(7)より

$$\begin{cases} W_0^+(\tau) - W_0^-(\tau) = 0; & \tau \in L'_c \\ W_0^+(\tau) + W_0^-(\tau) = F_w(\tau); & \tau \in L'_b \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau) = 0; & \tau \in L'_c \\ \Phi_0^+(\tau) + \Phi_0^-(\tau) = F_\phi(\tau); & \tau \in L'_b \end{cases} \quad (9)$$

ただし

$$\begin{cases} F_w(\tau) = f_w \tau + \overline{f_w} / \tau, & F_\phi(\tau) = f_\phi \tau + \overline{f_\phi} / \tau \\ f_w = (2R/\Delta) \{ (k_0 + k_1)(G_0 K_w - e_0 K_\phi) + (e_0 + e_1)(e_0 K_w + k_0 K_\phi) \} \\ f_\phi = (2R/\Delta) \{ (e_0 + e_1)(G_0 K_w - e_0 K_\phi) - (G_0 + G_1)(e_0 K_w + k_0 K_\phi) \} \\ \Delta = (G_0 + G_1)(k_0 + k_1) + (e_0 + e_1)^2 \end{cases} \quad \dots(10)$$

を得る。すなわち、 $W_0(\zeta)$, $\Phi_0(\zeta)$ は、 $0 < |\zeta| < \infty$ から L'_b を除いた領域で正則、式(4)を満たす関数であり、式(8), (9)で与えられる Hilbert 問題の解である。よって、 $W_0(\zeta)$, $\Phi_0(\zeta)$ は次のように与えられる⁽²⁾。

$$\begin{cases} W_0(\zeta) = (f_w \zeta + \overline{f_w} / \zeta) / 2 + (K_w R - f_w / 2) \chi(\zeta) / \zeta \\ \Phi_0(\zeta) = (f_\phi \zeta + \overline{f_\phi} / \zeta) / 2 + (-K_\phi R - f_\phi / 2) \chi(\zeta) / \zeta \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 $\chi(\zeta)$ は

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \tau_1^+)^{-1/2} (\zeta - \tau_1^-)^{-1/2} (\zeta - \tau_2^+)^{-1/2} (\zeta - \tau_2^-)^{-1/2} \quad (12)$$

(τ_1^\pm , τ_2^\pm は、式(2)による t_1^\pm , t_2^\pm の像) で定義され、 $|\zeta| < \infty$ から L'_b を除いた領域で正則な関数であり、 $\chi(\zeta) / \zeta^2 \rightarrow 1$ ($\zeta \rightarrow \infty$) となる分枝をとるものとする。

2.5 応力・電気変位拡大係数

Fig. 1 に示すように、はく離先端 t_1^+ を原点とする局所座標系 (ξ, η) , (r, θ) をとり

$$t = \xi + i\eta = r e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (13)$$

とする。そして

$$\zeta = \tau_1^+ + i e^{i\theta_1} t / R \quad (14)$$

とし、 $t \rightarrow 0$ すなわち $\zeta \rightarrow \tau_1^+$ とする。この時、 $\sigma_{z\xi} - i\sigma_{z\eta}$, $D_\xi - iD_\eta$ が $t^{-1/2}$ の特異性を持つことが見出せるので、応力拡大係数・電気変位拡大係数を次のように定義できる。

$$k_\sigma = \lim_{t \rightarrow 0} i(2\pi)^{1/2} (\sigma_{z\xi 0} - i\sigma_{z\eta 0}), \quad k_D = \lim_{t \rightarrow 0} i(2\pi)^{1/2} (D_{\xi 0} - iD_{\eta 0}) \quad (15)$$

よって、式(11)にもとづいて $\sigma_{z\xi 0} - i\sigma_{z\eta 0}$, $D_{\xi 0} - iD_{\eta 0}$ を求め、式(15)に代入することにより、次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{k_\sigma}{\sigma_{zx}^\infty \sqrt{\pi R}} = f(\theta_1, \theta_2) \cdot F \left(\hat{G}_1, \hat{k}_1, \eta_0, \eta_1; \sqrt{\frac{G_0}{k_0} \frac{D_x^\infty}{\sigma_{zx}^\infty}} \right) \\ \frac{k_D}{D_x^\infty \sqrt{\pi R}} = f(\theta_1, \theta_2) \cdot F \left(\hat{k}_1, \hat{G}_1, -\eta_0, -\eta_1; \sqrt{\frac{k_0}{G_0} \frac{\sigma_{zx}^\infty}{D_x^\infty}} \right) \end{cases} \quad (16)$$

ただし、

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = \sqrt{\sin x_1} \sqrt{(\cos x_1 + \cos x_2) / 2} \\ F(x_1, x_2, x_3, x_4; x_5) = \\ 2 \left[\frac{x_1(1+x_2) + \sqrt{x_1 x_2} x_4 (x_3 + \sqrt{x_1 x_2} x_4) + (x_1 x_3 - \sqrt{x_1 x_2} x_4) x_5}{(1+x_1)(1+x_2) + (x_3 + \sqrt{x_1 x_2} x_4)^2} \right] \end{cases} \quad (17)$$

$$\hat{G}_1 = G_1 / G_0, \quad \hat{k}_1 = k_1 / k_0, \quad \eta_0 = e_0 / \sqrt{G_0 k_0}, \quad \eta_1 = e_1 / \sqrt{G_1 k_1} \quad (18)$$

Fig. 2 にき裂長さが応力・電気変位拡大係数に与える影響を示す。

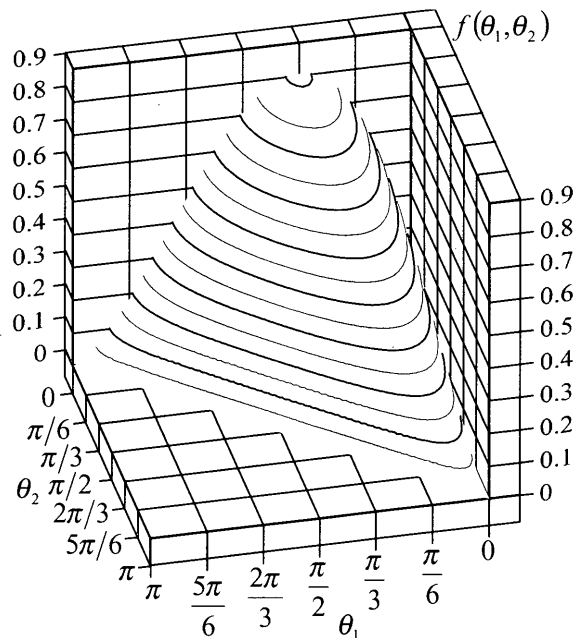


Fig. 2 Effect of crack lengths on stress intensity factor and electric displacement intensity factor

4. 結言

界面の一部がはく離している圧電体介在物/母材系が、無限遠方で面外方向に力学的負荷、面内方向に電気的負荷を受ける場合の2次元電気弾性問題を取り扱い、き裂先端での応力拡大係数・電気変位拡大係数を定式化した。その結果、拡大係数はき裂の長さや物性値の効果の積で表されることが分かった。

参考文献

- (1) Ishihara, M., Noda, N., "An Electroelastic Problem of an Infinite Piezoelectric Body with Two Inhomogeneities," *JSM International Journal Ser. A*, **42**, pp. 492-498 (1999).
- (2) Muskhelishvili, N. I., "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity," 4th ed., Noordhoff, Groningen, Holland, (1963).